**Evaluación para el Acceso a la Universidad. Convocatoria de 2022**
**Materia: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**
**El examen está compuesto de 3 secciones de dos bloques cada una. A su vez cada bloque tiene dos ejercicios. El alumno deberá elegir un bloque de cada una de las tres secciones. Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora.**

## Sección 1 (3 puntos) Bloque 1

**1.** *En el siguiente problema de programación lineal optimiza la función $f(x, y) = 8x + 3y$ sujeta a las siguientes restricciones:*

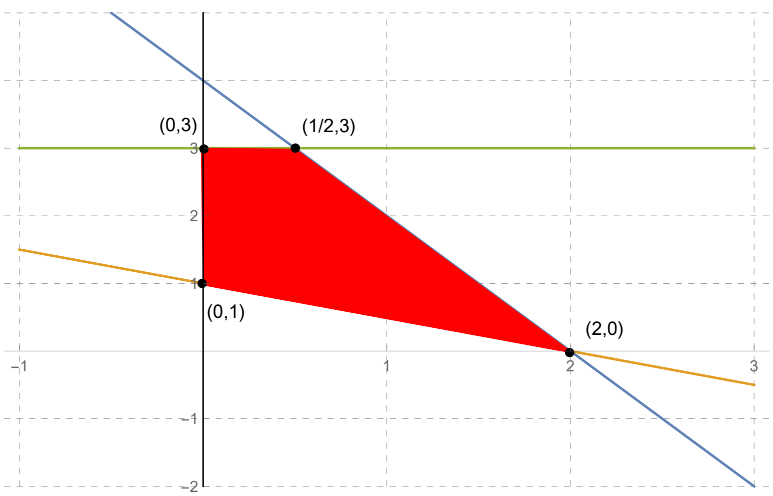
$$\begin{cases} -2x + 4 \geq y \\ x + 2y \geq 2 \\ y \leq 3 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

*a) Dibuja la región factible y determina sus vértices. (1.25 puntos)*

*b) Indica los puntos óptimos (máximo y mínimo) y sus respectivos valores. (0.25 puntos)*

**Solución:**

a) Los vértices de la región factible son $A = (0, 3)$, $B = (1/2, 3)$, $C = (0, 1)$, y $D = (2, 0)$. (0.25 puntos por determinar los vértices y 0.25 por cada inecuación bien representada. Toda la región factible 1 punto)




b) Aplicados a la función objetivo $f(A) = 9$; $f(B) = 13$; $f(C) = 3$; $f(D) = 16$. Luego el máximo está en el punto $(2, 0)$ con 16 unidades y el mínimo en $(0, 1)$ con 3 unidades. (0.25 puntos)

**2.** *El número total de premios Goya recibidos a lo largo de su carrera por tres mujeres (Isabel, Carmen y Enma) es de 15 Goyas. Si aumentamos en un premio la cantidad que ha recibido Isabel obtenemos el triple de los premios ganados por Enma y los que recibe Enma equivalen a las tres cuartas partes de los que recibe Carmen.*

*a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántos premios Goya han recibido cada una. (0.75 puntos)*

*b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.75 puntos)*

**Solución:**

a) Tomando $x \equiv$ nº de premios Goya de Isabel; $y \equiv$ nº de premios Goya de Carmen; $z \equiv$ nº de premios Goya de Enma.

$$\begin{cases} x + y + z = 15 \\ x + 1 = 3z \\ z = \frac{3}{4}y \end{cases} \quad \text{(0.25 puntos por cada ecuación bien planteada).}$$

b) La solución del sistema es $(x, y, z) = (8, 4, 3)$ premios Goya. Isabel ha recibido 8, Carmen 4 y Enma 3 premios Goya (0.5 puntos por el desarrollo de la resolución y 0.25 puntos por la solución correcta).

## Bloque 2

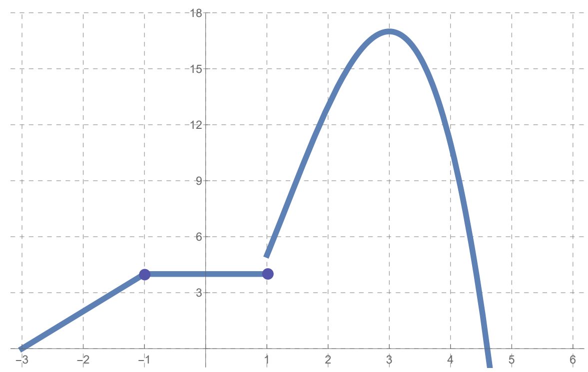
**1.** *Se considera la función* $f(x) = \begin{cases} 2x+2t & si\ x < -1 \\ t+1 & si\ -1 \leq x \leq 1 \\ -x^3+4x^2+3x-1 & si\ x > 1 \end{cases}$

*a) ¿Para qué valor de $t$ la función $f(x)$ es continua $x=-1$? (0.5 puntos)*

*b) Calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(1,\infty)$. (0.5 puntos)*

*c) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en $(1,\infty)$. (0.5 puntos)*

**Solución:**




a) La función es continua en $x=-1 \Leftrightarrow \lim_{x\to -1} f(x) = f(-1)$. Para que exista el límite, los límites laterales tienen que ser iguales:

$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1}(2x+2t) = 2t-2$ y $\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1}(t+1) = t+1 = f(-1)$.

$2t-2 = t+1 \Rightarrow t=3$. (Saber las condiciones 0.25 puntos. Cálculo correcto 0.25 puntos)

b) Los extremos relativos verifican $f'(x) = 0 \Rightarrow f'(x) = -3x^2+8x+3 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$ y $x=3$. Se evalúa el valor $x=3$ ($x=-\frac{1}{3} \notin (1,\infty)$) en $f''(x) = -6x+8$ para determinar si el punto encontrado es máximo o mínimo, $f''(3) = -10 < 0 \Rightarrow$ máximo relativo en $(3,17)$. (Saber las condiciones 0.25 puntos. Cálculo correcto 0.25 puntos)

c) $f'(x) > 0$ en el intervalo $(1,3)$ por lo que la función crece y $f'(x) < 0$ en el intervalo $(3,\infty)$ donde decrece. (0.25 por cada intervalo correcto)

**2.** *La función $f(x) = ax^3+bx+c$ presenta un mínimo en el punto $(2,1)$ y la pendiente de la recta tangente en $x=0$ es $-12$. Con estos datos, halla razonadamente los valores de los parámetros a, b y c. (1.5 puntos)*

**Solución:**

$f(x) = ax^3+bx+c \Rightarrow f'(x) = 3ax^2+b.$

$$\begin{cases} f(2)=1 \\ f'(2)=0 \\ f'(0)=-12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8a+2b+c=1 \\ 12a+b=0 \\ b=-12 \end{cases} \Rightarrow a=1,\ c=17 \Rightarrow f(x)=x^3-12x+17.$$

(0.25 por cada condición. 0.75 por la solución correcta)

## Sección 2 (3.5 puntos) Bloque 1

**3.** *En un concurso se les proponen a los participantes 3 pruebas ($A$, $B$ y $C$) de las que han de elegir una. El 40 % de los participantes eligen la prueba $A$, superándola el 50 % de estos. El 25 % eligen la prueba $B$ y en este caso la prueba no es superada por el 45 % de los participantes. La prueba $C$ la superan el 60 % de los participantes que la escogen.*

*a) Elegido un participante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que haya superado la prueba? (0.75 puntos)*

*b) Si se sabe que un participante no ha superado la prueba, ¿cuál es la probabilidad de que haya elegido la prueba $A$? (0.75 puntos)*

**Solución:**

$A$ = Prueba A; $B$ = Prueba B; $C$ = Prueba C; $S$ = Superar la prueba; $S^c$ = No superar la prueba.

$P(A)=0.4$; $P(B)=0.25$; $P(C)=0.35$; $P(S\mid A)=0.5$; $P(S\mid B)=0.55$; $P(S\mid C)=0.6$; $P(S^c\mid A)=0.5$; $P(S^c\mid B)=0.45$; $P(S^c\mid C)=0.4$.

a) $P(S) = P(A) \cdot P(S \mid A) + P(B) \cdot P(S \mid B) + P(C) \cdot P(S \mid C) = 0.4 \cdot 0.5 + 0.25 \cdot 0.55 + 0.35 \cdot 0.6 = 0.548$. (0.75 puntos)

b) $P(A \mid S^c) = \frac{P(A \cap S^c)}{P(S^c)} = \frac{P(A) \cdot P(S^c|A)}{P(S^c)} = \frac{0.4 \cdot 0.5}{1-0.548} = \frac{0.2}{0.452} = 0.442$. (0.75 puntos)

**4.** *El tiempo empleado para resolver un problema de Estadística sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 6.4$ minutos. Se ha tomado una muestra de 9 personas y los tiempos empleados en resolver el problema han sido* 12, 11, 10, 9, 7, 12, 11, 8 *y* 10 *minutos.*

*a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional del tiempo empleado en resolver el problema con un nivel de confianza del 97 %. (1 punto)*

*b) Calcula el tamaño mínimo de la muestra elegida para que, con el mismo nivel de confianza, el error máximo admisible sea menor que 3 minutos. (1 punto)*

| z | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2.0 | 0.9772 | 0.9778 | 0.9783 | 0.9788 | 0.9793 | 0.9798 | 0.9803 | 0.9808 | 0.9812 | 0.9817 |
| 2.1 | 0.9821 | 0.9826 | 0.9830 | 0.9834 | 0.9838 | 0.9842 | 0.9846 | 0.9850 | 0.9854 | 0.9857 |

**Solución:**

a) La media muestral es: $\bar{X} = \frac{12+11+10+9+7+12+11+8+10}{9} = 10$ minutos.

Del enunciado se deduce: $\sigma = 6.4$ minutos, $n = 9$, $1 - \alpha = 0.97 \Rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.17$. (0.25 puntos)

$\text{IC} = \left( \bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad \bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$ (0.25 puntos)

$\text{IC} = \left( 10 - 2.17 \frac{6.4}{\sqrt{9}}, \ 10 + 2.17 \frac{6.4}{\sqrt{9}} \right) = (5.371, \ 14.629)$. (0.5 puntos)

b) El error máximo admisible viene dado por $E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow n = \left( \frac{Z_{\frac{\alpha}{2}} \sigma}{E} \right)^2$ (0.5 puntos)

Para $E = 3 \Rightarrow n = \left( \frac{2.17 \cdot 6.4}{3} \right)^2 = (4.629)^2 = 21.431$. El tamaño mínimo de la muestra para que el error de estimación de la media sea inferior a 3 minutos, con el mismo nivel de confianza, debe ser 22. (0.5 puntos)

## Bloque 2

**3.** *Un concesionario de automóviles tiene en oferta tres modelos de coche: uno deportivo, otro familiar y el tercero es un monovolumen. El mes pasado se vendieron* 10 *deportivos,* 6 *familiares y* 3 *monovolúmenes y se obtuvieron* 851000 *euros. El coche deportivo vale* 2000 *euros más que el familiar. Por* 5 *deportivos vendidos se obtienen* 13000 *euros más que si se venden* 6 *monovolúmenes.*

*a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar el precio de cada uno de los tres modelos. (0.75 puntos)*

*b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.75 puntos)*

**Solución:**

a) Tomando $x \equiv$ precio del deportivo; $y \equiv$ precio del familiar; $z \equiv$ precio del monovolumen.

$$\left\{ \begin{array}{c} 10x + 6y + 3z = 851000 \\ x = y + 2000 \\ 5x = 6z + 13000 \end{array} \right.$$ (0.25 puntos por cada ecuación bien planteada).

b) La solución del sistema es $(x, y, z) = (47000, 45000, 37000)$ euros. El deportivo vale 47000 euros, el familiar 45000 euros y el monovolumen 37000 euros (0.5 puntos por el desarrollo de la resolución y 0.25 puntos por la solución correcta).

**4.** *Dadas las matrices* $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ *y* $C = \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

*a) Resuelve la ecuación matricial* $X + X \cdot \frac{1}{2} A = A \cdot B$. *(1.5 puntos)*

*b) Calcula* $-\frac{1}{2} A - 2B^T + C$. *(0.5 puntos)*

**Solución:**

a) $X + X \cdot \frac{1}{2} A = A \cdot B \Rightarrow X \cdot \left( I + \frac{1}{2} A \right) = A \cdot B \Rightarrow X = A \cdot B \cdot \left( I + \frac{1}{2} A \right)^{-1}$.

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \right]^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & -8 \\ -30 & -26 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -28 & 18 \\ -86 & 56 \end{pmatrix}.$$

(0.5 puntos por la matriz inversa. 1.5 todo correcto)

b) $-\frac{1}{2}A - 2B^T + C = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}^T + \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -10 \\ 2 & -8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$
(0.5 puntos)

## Sección 3 (3.5 puntos) Bloque 1

**5.** *En un ejercicio de oposición, el opositor ha de presentar un tema de los cuatro que se seleccionan al azar de un programa de 40 temas. Si los cuatro temas seleccionados han de ser distintos y el opositor tiene bien preparados 22 temas,*

*a) ¿Qué probabilidad tiene el opositor de aprobar el examen? (0.75 puntos)*

*b) ¿Qué probabilidad tiene el opositor de saberse exactamente uno de los cuatro temas elegidos? (0.75 puntos)*

**Solución:**

$S$ = Sabe el tema; $S^c$ = No sabe el tema.

a) Para aprobar el examen tiene que saberse alguno de los cuatro temas elegidos. La probabilidad de que se sepa alguno es el complementario de que no sepa ninguno.

$P(\text{No saber ninguno}) = P(S^c \cap S^c \cap S^c \cap S^c) = \frac{18}{40} \cdot \frac{17}{39} \cdot \frac{16}{38} \cdot \frac{15}{37} = 0.033 \Rightarrow P(\text{Saber alguno}) = 1 - 0.033 = 0.967$. (0.75 puntos)

b) $P(\text{Saberse un tema}) = P(S \cap S^c \cap S^c \cap S^c) + P(S^c \cap S \cap S^c \cap S^c) + P(S^c \cap S^c \cap S \cap S^c) + P(S^c \cap S^c \cap S^c \cap S) = 4 \cdot \frac{22}{40} \cdot \frac{18}{39} \cdot \frac{17}{38} \cdot \frac{16}{37} = 0.196$
(0.75 puntos)

**6.** *Una marca de neumáticos ha tomado una muestra aleatoria de* 100 *ruedas y ha medido la presión de inflado, proporcionando una media de* 2.3 *bares. Si se sabe que la presión de inflado sigue una distribución normal de media desconocida y varianza* $\sigma^2 = 0.81$ *bares*$^2$ :

*a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional de la presión de inflado con un nivel de confianza del* 95 %. *(1 punto)*

*b) Explica razonadamente qué ocurrirá con la amplitud del intervalo si para el mismo nivel de confianza disminuimos el tamaño de muestra. (0.5 puntos)*

*c) La marca de neumáticos afirma que la media de presión de inflado es de* 2 *bares. ¿Se puede aceptar la afirmación del fabricante con un nivel de confianza del* 90 %*? Justificar la respuesta. (0.5 puntos)*

| z | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1.8 | 0.9641 | 0.9649 | 0.9656 | 0.9664 | 0.9671 | 0.9678 | 0.9686 | 0.9693 | 0.9699 | 0.9706 |
| 1.9 | 0.9713 | 0.9719 | 0.9726 | 0.9732 | 0.9738 | 0.9744 | 0.9750 | 0.9756 | 0.9761 | 0.9767 |

**Solución:**

a) Del enunciado se deduce: $\bar{X} = 2.3$ bares, $\sigma^2 = 0.81$ bares$^2 \Rightarrow \sigma = 0.9$ bares, $n = 100$, $1 - \alpha = 0.95 \Rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$ (0.25 puntos)

$\text{IC} = \left(\bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad \bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ (0.25 puntos)

$\text{IC} = \left(2.3 - 1.96 \frac{0.9}{\sqrt{100}},\ 2.3 + 1.96 \frac{0.9}{\sqrt{100}}\right) = (2.124,\ 2.476)$ (0.5 puntos)

b) Al disminuir el tamaño de muestra, aumenta el valor de $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ y por tanto aumentará la amplitud del intervalo. (0.5 puntos)

c) El valor de 2 bares no está en el intervalo calculado al 95 %, como al disminuir el nivel de confianza disminuye la amplitud del intervalo, el valor de 2 bares tampoco estará en el IC al 90 % y por lo tanto no se puede aceptar la afirmación. (0.5 puntos)

## Bloque 2

**5.** *Se considera la función* $f(x) = \begin{cases} (x+2)^2 + t & si\ x < -1 \\ 3 & si\ -1 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 6x + 9 + t & si\ x > 2 \end{cases}$

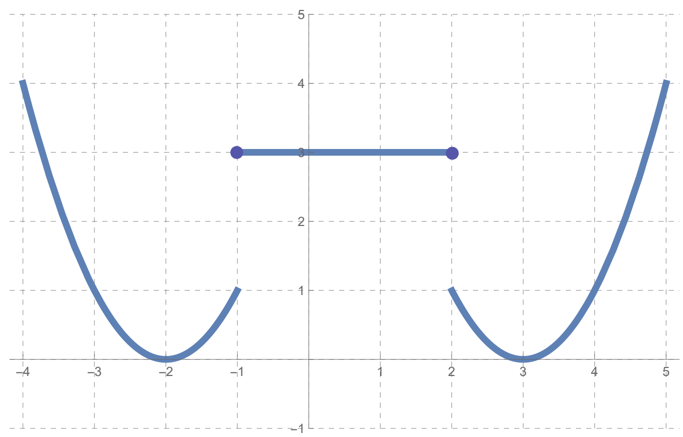
*a) ¿Existe un valor de* $t$ *para el que la función* $f(x)$ *es continua en* $x = -1$ *y en* $x = 2$*? (0.75 puntos)*

*b) Representa gráficamente la función* $f(x)$ *para* $t = 0$. *(0.75 puntos)*

**Solución:**

a) La función es continua en $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Para que exista el límite, los límites laterales tienen que ser iguales:
$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1}((x+2)^2+t) = t+1$ y $\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1}(3) = 3 = f(-1)$.
$t+1=3 \Rightarrow t=2$.
$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2}(3) = 3 = f(2)$ y $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2}(x^2-6x+9+t) = t+1$.
$t+1=3 \Rightarrow t=2$. (Saber las condiciones 0.25 puntos. Cálculo correcto 0.5 puntos)

b) (0.25 puntos por cada trozo bien dibujado)




**6.** *El tiempo de publicidad (en minutos) en una emisora de radio a lo largo de la semana viene dado por la siguiente función* $S(x) = x^3 - \frac{21}{2}x^2 + 30x + 36$ *con* $x =$ *días y* $1 \le x \le 7$.

*a) ¿Cuántos minutos de publicidad emite el tercer día? (0.5 puntos)*

*b) ¿Durante qué día se emite más publicidad y cuánto tiempo? (0.75 puntos)*

*c) ¿Qué día emitieron menos publicidad? ¿Cuántos minutos? (0.75 puntos)*

**Solución:**

a) $S(3) = 3^3 - \frac{21}{2}\cdot 3^2 + 30\cdot 3 + 36 = 58.5$ minutos. (0.5 puntos)

b) Máximo relativo si $S'(x) = 0$ y $S''(x) < 0$. $S'(x) = 3x^2 - 21x + 30$ y $S'(x) = 0 \Rightarrow x = 2$ y $x = 5$. $S''(x) = 6x - 21 \Rightarrow S''(2) = -9 < 0$. Luego es máximo relativo $S(2) = 2^3 - \frac{21}{2}\cdot 2^2 + 30\cdot 2 + 36 = 62$ minutos. Calculamos los extremos $S(1) = 1^3 - \frac{21}{2}\cdot 1^2 + 30\cdot 1 + 36 = 56.5$ minutos y $S(7) = 7^3 - \frac{21}{2}\cdot 7^2 + 30\cdot 7 + 36 = 74.5$ minutos. El máximo se obtiene el séptimo día con 74.5 minutos. (Saber las condiciones 0.25 puntos. Cálculo correcto 0.5 puntos)

c) Mínimo relativo si $S'(x) = 0$ y $S''(x) > 0$. $S''(5) = 9 > 0$. Luego es mínimo relativo $S(5) = 5^3 - \frac{21}{2}\cdot 5^2 + 30\cdot 5 + 36 = 48.5$ minutos. El mínimo se obtiene el quinto día con 48.5 minutos. (Saber las condiciones 0.25 puntos. Cálculo correcto 0.5 puntos)